

局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳振动 频率与阻尼有限元分析

陈中石^{1,2}, 孙 伟^{1,2}

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

2. 东北大学 机械工程与自动化学院

航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 沈阳 110819)

摘 要: 在引入黏弹性材料复模量模型和考虑圆柱壳弹性边界的基础上, 研发了有限元程序来解决考虑频率依赖性的复合圆柱壳振动频率与阻尼的非线性计算问题。创建了一种 4 节点 24 自由度复合壳单元来模拟局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳的力学行为, 推导了单元的刚度及质量矩阵。提出由 6 个弹簧组组成的周向变刚度弹性约束模型来模拟圆柱壳底部的弹性边界条件。确定了复合圆柱壳的动力学有限元方程, 并描述了用特征向量增值法求解其振动频率与阻尼的迭代计算过程。对贴敷 ZN-1 自由阻尼层圆柱壳进行了实例计算, 结果表明: 该算法的计算结果与实验测试值误差最大为 3.69%, 另外黏弹性材料的频率依赖性对复合结构固有频率影响小于 0.01%, 而对模态损耗因子影响最大为 109.47%。

关 键 词: 黏弹性阻尼层; 圆柱壳; 频率依赖性; 有限元分析; 振动频率与阻尼

中图分类号: V214; TH113.1; TB535 **文献标志码:** A

Finite element analysis of vibration frequency and damping of cylindrical shell partially covered viscoelastic damping layer

CHEN Zhongshi^{1,2}, SUN Wei^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering and Automation,

Northeastern University, Shenyang 110819, China;

2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion Systems,

Ministry of Education, School of Mechanical Engineering and Automation,

Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: On the basis of introducing the complex modulus model of viscoelastic materials and considering the elastic boundary of the cylindrical shell, the finite element program was developed to solve the nonlinear calculation problem of vibration frequency and damping for the composite cylindrical shell in view of the frequency dependence. A composite shell element with 4 nodes and 24 degrees of freedom was created to simulate the mechanical behavior of the cylindrical shell with partially covered viscoelastic damping layer, and the stiffness and mass matrices of the element were derived. A circumference variable stiffness elastic constraint model with 6 spring groups was proposed to simulate the elastic boundaries at the

收稿日期: 2019-12-06
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(N180312012)
作者简介: 陈中石(1995—), 男, 硕士生, 主要研究方向为考虑频率依赖性的黏弹性阻尼结构振动特性研究。
通信作者: 孙伟(1975—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事机械系统动力学及振动控制研究。E-mail: weisun@mail.neu.edu.cn
引用格式: 陈中石, 孙伟. 局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳振动频率与阻尼有限元分析[J]. 航空动力学报, 2020, 35(6): 1176-1185.
CHEN Zhongshi, SUN Wei. Finite element analysis of vibration frequency and damping of cylindrical shell partially covered viscoelastic damping layer[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(6): 1176-1185.

bottom of the cylindrical shell. The dynamic finite element equations of the composite cylindrical shell were determined, and the iterative calculation process of solving its vibration frequency and damping by eigenvector increment method was described. A case study for the cylindrical shell with ZN-1 free damping layer was performed and the results showed that the maximum error between the calculation results of the proposed algorithm and the experiment values was 3.69%. In addition, the frequency dependence of the viscoelastic material had an effect on the natural frequency of the composite structure of less than 0.01%, but the maximum effect on the modal loss factor was 109.47%.

Key words: viscoelastic damping layer; cylindrical shell; frequency dependence; finite element analysis; vibration frequency and damping

航空、航天装备中存在大量的圆柱壳结构,例如航空发动机机匣以及火箭的外壳等。这些结构在多场耦合外载荷作用下经常由于振动超标而发生失效。因而必须寻求有效的减振措施以提高圆柱壳结构的抗振及抗疲劳特性。

在结构的外表面贴敷黏弹性阻尼层是一种重要的阻尼减振措施,其利用黏弹性材料的高耗能特性(高内阻尼)实现削弱结构的共振峰的目标,因而得到了最为广泛的应用^[1-3]。为了面向圆柱壳结构实现有效的阻尼减振,必须创建相应的振动分析模型,以实现贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳结构振动特性的有效预估。黏弹性材料具有频率依赖特性^[4-6],即其弹性模量和材料损耗因子等会随外激振频率的改变而变化,因而考虑频率依赖性的黏弹性阻尼复合结构的动力学建模一直是一项挑战性的研究任务。

目前已经有很多学者针对贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳结构的动力学建模问题开展了研究,例如, Sainsbury 和 Masti^[7]采用有限元法对局部贴敷黏弹性阻尼层的复合圆柱壳建模,研究了其振动特性。Zheng 等^[8]应用半解析法对两端支撑的局部贴敷阻尼层圆柱壳建模,分析了圆柱壳的振动响应并进行了相关阻尼优化研究。Mokhtari 等^[9]使用 Raynell-Ritz 法和 Donnell 理论对黏弹性阻尼层的复合圆柱壳建模,研究了简支状态下的圆柱壳在不同长度、半径和厚度下的振动和阻尼特性。Saravanan 等^[10]使用半解析法对旋转态下的多层黏弹性阻尼层复合圆柱壳进行建模并研究了黏弹性阻尼层数对振动和阻尼特性的影响。从上述的研究可已看出,研究者对贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳的振动特性已进行较为深入的研究,但是从作者掌握的文献上来看,还没有发现在考虑黏弹性材料频率依赖性的基础上对复合圆柱壳结构进行建模及分析的研究。

航空及航天中的圆柱壳结构一般都由螺栓固定,通常为弹性约束边界,为了有效完成对上述结构的建模,还需要研究对圆柱壳弹性边界的有效模拟。目前主要使用弹簧组来模拟圆柱壳的弹性边界条件,实践证明这是一种非常有效的建模方法。相关研究诸如, Zhou 等^[11]用 8 组平动弹簧及旋转弹簧来模拟两端约束的圆柱壳边界条件,分析了弹簧刚度值的变化对固有频率的影响。Yang 等^[12]用 3 组平动弹簧和一组旋转弹簧来模拟一端约束的黏弹性夹层圆柱壳边界条件,并计算了复合圆柱壳的固有频率和损耗因子。Song 等^[13]也用相同的边界模拟方法研究了复合圆柱壳的振动和阻尼。在上述用弹簧组模拟圆柱壳的研究中,每类弹簧组的刚度通常取一个值,即弹簧组的刚度是均匀分布的。实际上螺栓存在影响区,其连接刚度值是非均匀分布的^[14],因而这种用定刚度值弹簧组模拟圆柱壳边界条件的方法势必会降低动力学建模与分析的精度。

本文以局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳为对象,采用有限元法对其进行动力学建模与分析。在建模过程中引入了黏弹性阻尼材料的频率依赖性,并用非均匀分布弹簧组来模拟复合圆柱壳的弹性边界。进行了实例研究,用实验结果对所研发的模型进行了验证,并分析了黏弹性材料的频率依赖性对复合圆柱壳振动特性的影响。

1 局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳动力学有限元建模

如图 1 所示为所研究的局部贴敷黏弹性阻尼层的圆柱壳结构。复合薄壁圆柱壳主要由厚度为 T_1 的金属基体和厚度为 T_2 的黏弹性阻尼层构成。在圆柱壳的中心建立了柱坐标系 (x, θ, z) , 其中 u 、 v 和 w 分别为沿轴向 x 、周向 θ 和径向 z 的中面参考位移, L 和 R 分别为黏弹性圆柱壳的轴

向长度和名义半径, L_c 为周向局部贴敷阻尼层的高度。中面到圆柱壳内表面的距离 h_0 可表示为

$$h_0 = \frac{E_1 T_1^2 + 2E_0 T_1 T_2 + E_0 T_2^2}{2(E_1 T_1 + E_0 T_2)} \tag{1}$$

式中 E_1 为基体的弹性模量, E_0 是角频率为 0 rad/s 时黏弹性阻尼层的弹性模量。

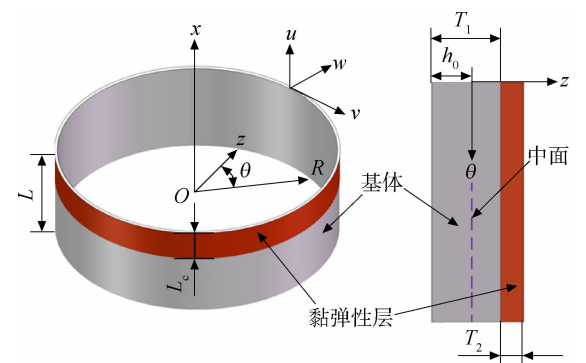


图 1 局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳复合结构
Fig. 1 Composite structure of cylindrical shell partially covered viscoelastic damping layer

这里结合黏弹性阻尼层圆柱壳的特点研发了一种 4 节点 24 自由度的复合圆柱壳单元, 通过 Matlab 软件自行编制有限元程序来实现对复合结构的振动分析, 以下描述具体的推导过程。

1.1 单元分析

图 2 为所研发的复合圆柱壳单元, 该单元每个节点包含 6 个自由度, 分别定义为 $u, \frac{\partial u}{\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial \theta}$ 。

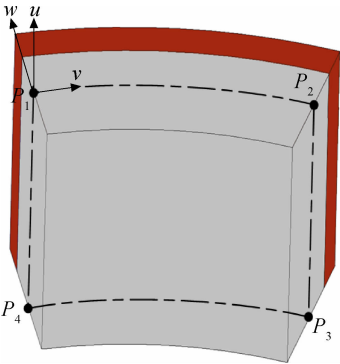


图 2 复合圆柱壳单元
Fig. 2 Composite cylindrical shell element

复合壳单元任意一点的位移场同节点 i 位移的关系可表示为

$$[u, v, w]^T = \sum_{i=1}^4 N_i(x, \theta) \left[u_i, \frac{\partial u_i}{\partial \theta}, v_i, \frac{\partial v_i}{\partial \theta}, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right]^T \tag{2}$$

式中 N_i 为节点 i 的单元形函数矩阵, 表示为

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & N_{\theta i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & N_{\theta i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & N_{\theta i} \end{bmatrix} \tag{3}$$

根据弹性板壳理论及 Love 第一近似理论^[15], 复合壳单元内的应变-位移关系可以表示为

$$[\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma, \kappa_1, \kappa_2, \tau]^T = \sum_{i=1}^4 B_i \left[u_i, \frac{\partial u_i}{\partial \theta}, v_i, \frac{\partial v_i}{\partial \theta}, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right]^T \tag{4}$$

式中 $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ 和 κ_1, κ_2, τ 分别为圆柱壳中面上一点的应变和弯曲应变。 $B_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为单元应变矩阵, 可以表示为

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial \theta} & \frac{N_i}{R} & \frac{N_{\theta i}}{R} \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial \theta} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{\theta i}}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial \theta} & \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 N_{\theta i}}{\partial \theta^2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{R} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{2}{R} \cdot \frac{\partial N_{\theta i}}{\partial x} & \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial \theta} & \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 N_{\theta i}}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

对于贴敷黏弹性阻尼层部分, 结构包含了第 1 层圆柱壳基体和第 2 层黏弹性阻尼层。其中基体层的弹性模量为 E_1 , 而黏弹性材料具有频率依赖性, 其复模量 $E_2^*(\omega)$ 可表示为

$$E_2^*(\omega) = E_2(\omega)[1 + i\eta_2(\omega)] \tag{6}$$

式中 $E_2(\omega)$ 和 $\eta_2(\omega)$ 分别为黏弹性材料的弹性模量和损耗因子, ω 为激振频率。

假设圆柱壳处于平面应力状态, 由广义胡克定律可得圆柱壳第 l 层应力与应变的关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{21} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}$ 和 $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$ 分别为圆柱壳任意点处的应力和应变, $Q'_{ij} (i, j=1, 2)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} Q_{11}^1 &= Q_{22}^1 = \frac{E_1}{1-\mu_1^2}, & Q_{11}^2 &= Q_{22}^2 = \frac{E_2^*(\omega)}{1-\mu_2^2} \\ Q_{12}^1 &= Q_{21}^1 = \frac{E_1\mu_1}{1-\mu_1^2}, & Q_{12}^2 &= Q_{21}^2 = \frac{E_2^*(\omega)\mu_2}{1-\mu_2^2} \\ Q_{33}^1 &= \frac{E_1}{2(1+\mu_1)}, & Q_{33}^2 &= \frac{E_2^*(\omega)}{2(1+\mu_2)} \end{aligned} \tag{8}$$

式中 μ_1 和 μ_2 分别为基体和黏弹性层的泊松比。
可以进一步得到单元的内力 $\mathbf{F}$ 与弯矩 $\mathbf{M}$, 表示为

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_\theta \\ F_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{z_0}^{z_2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \\ z\sigma_x \\ z\sigma_\theta \\ z\sigma_{x\theta} \end{bmatrix} dz = \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \tau \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $\mathbf{S}^*$ 为贴敷部位的弹性矩阵, 可以表示为

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中 A_{ij}, B_{ij} 和 D_{ij} 可以表示为

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{l=1}^2 Q'_{ij} (z_l - z_{l-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 Q'_{ij} (z_l^2 - z_{l-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{l=1}^2 Q'_{ij} (z_l^3 - z_{l-1}^3) \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $z_0 = -h_0, z_1 = T_1 - h_0, z_2 = T_1 + T_2 - h_0$ 。

由于黏弹性材料的弹性模量远小于基体的弹性模量, 为了简化建模计算的过程, 对于局部贴敷黏弹性阻尼层薄壁圆柱壳可以假定其贴敷部位和未贴敷部位的中面完全重合。

贴敷了黏弹性材料的部位, 单元的复刚度矩阵 $\mathbf{K}_e^*$ 和质量矩阵 $\mathbf{M}_e$ 可以表示为

$$\mathbf{K}_e^* = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{S}^* \mathbf{B} (R+z) dz d\theta dx \tag{12}$$

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{2} \iiint \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} (R+z) dz d\theta dx \tag{13}$$

式中复刚度矩阵 $\mathbf{K}_e^* = \mathbf{K}_e + i\mathbf{D}_e$, $\mathbf{K}_e$ 和 $\mathbf{D}_e$ 分别为单元刚度矩阵和材料阻尼矩阵; $\rho = T_1\rho_1 + T_2\rho_2$, ρ_1 和 ρ_2 分别为基体和黏弹性材料的密度; $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 4 个节点组成的单元形函数矩阵和应变矩阵。

未贴敷黏弹性材料的部位, 单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 和质量矩阵 $\mathbf{M}_e$ 的计算与式(12)和式(13)一样, 其中 $\rho = T_1\rho_1$, 计算 $\mathbf{S}^*$ 时令 $Q_{ij}^2 = 0$ 。

1.2 弹性边界条件的模拟

假设圆柱壳是通过螺栓固定在一个特定的结构上, 如图 3 所示, 这样圆柱壳的约束并不是简支或固支等经典边界, 而是一种弹性约束。这里提出用连续分布的弹簧组模拟复合圆柱壳的底部的弹性约束, 每个弹簧组包含了 3 个平动弹簧, 其刚度分别为 k_u, k_v 和 k_w 以及 3 个转动弹簧, 其刚度分别为 $k_{u\theta}, k_{v\theta}$ 和 $k_{w\theta}$ 。

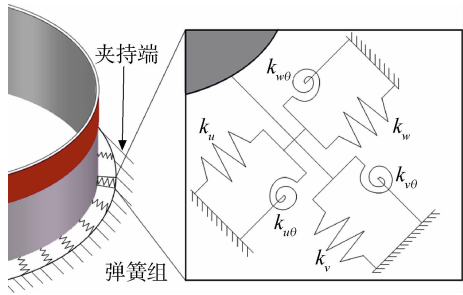


图 3 变刚度弹性约束圆柱壳模型
Fig. 3 Elastic constrained cylindrical shell model with variable stiffness

螺栓起连接作用时会在两个接触结合面之间产生一个以螺栓杆轴心为中心的一个非均匀分布近似圆形的压力区域, 称为螺栓影响区^[16], 因而这些分布的弹簧组不应该具有相同的刚度值。为了简化建模, 这里提出一种周向变刚度弹性约束模型来模拟圆柱壳底部的螺栓连接。在这个模型中, 假设弹簧的刚度值有两种状态: 一种是靠近螺栓影响区域的刚度值 k_{j1} ; 另一种是远离螺栓影响区域的刚度值 k_{j2} , 其分布规律如图 4 所示, 刚度关系式为

$$k_{j1} > k_{j2} \tag{14}$$

式中 $j = u, v, w, u\theta, v\theta, w\theta$ 。

在复合圆柱壳的建模过程中, 需要确定这两种刚度值的大小, 这里采用反推辨识技术来实现上述目标, 在匹配计算环节, 采用 MOEA/D 算法(基于分解的多目标进化算法)^[17]。决策变量为待求的两个刚度值 k_{j1} 和 k_{j2} , 目标变量为测得的

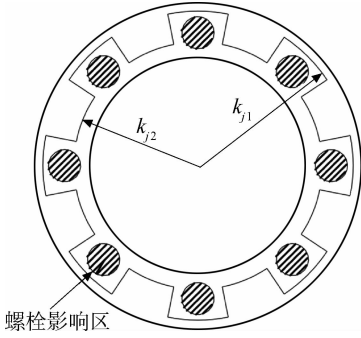


图4 弹簧组刚度分布示意图

Fig. 4 Stiffness distribution diagram of spring group

P 阶固有频率 $f_p (p=1, 2, \dots, P)$ 。MOEA/D 算法会在设定的弹簧刚度取值范围内随机取值构成 N 个种群, 每个种群是一个 12×1 的向量, 可以表示为

$$\mathbf{x}^n = \{k_{u1}, \dots, k_{u\theta 1}, k_{u2}, \dots, k_{u\theta 2}\}^T \quad (15)$$

式中 $n=1, 2, \dots, N$, 这 N 个种群可构成种群矩阵 $\mathbf{x}$ 。

目标函数可以表示为

$$g_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\lambda}_n) = \max_{p=1}^P \{k_{n,p} | f_p(\mathbf{x}) - f_p\} \quad (16)$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}_n = \{\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,P}\}^T$ 是一个权重向量, 其中 $\lambda_{n,p}$ 是第 p 阶固有频率的加权值, $f_p(\mathbf{x})$ 为根据当前的 $\mathbf{x}$ 计算得到的第 p 个固有频率值, $g_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为计算得到的所有固有频率里与目标固有频率经过加权后最大的一个值。

MOEA/D 算法通过迭代的方式, 不断地遗传进化使得 $g_n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\lambda}_n)$ 的值越来越小, 通过这种方式可以根据实验测得的固有频率值反推辨识出对应各个自由度的弹簧刚度值。

1.3 整体有限元方程的建立

在贴敷黏弹性阻尼层的复合圆柱壳上, 按单元对应的节点编号对单元刚度及质量进行组集。设圆柱壳贴敷部位的整体复刚度矩阵为 $\mathbf{K}^p(\omega)$ 和整体质量矩阵为 $\mathbf{M}^p$, 未贴敷部位的整体刚度矩阵为 $\mathbf{K}^d$ 和整体质量矩阵为 $\mathbf{M}^d$ 。进一步, 将各约束弹簧的刚度值 $k_u, k_v, k_w, k_{u\theta}, k_{v\theta}$ 和 $k_{w\theta}$ 按节点编号及自由度放入弹簧刚度矩阵 $\mathbf{K}_s$ 中, 这些矩阵的维数与整体有限元方程的自由度相同。

所以局部贴敷黏弹性阻尼层薄壁圆柱壳的频域自由振动方程可以表示为

$$(\mathbf{K}^*(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}^* = \mathbf{0} \quad (17)$$

式中 $\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}^p(\omega) + \mathbf{K}^d + \mathbf{K}_s$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^p + \mathbf{M}^d$, $\mathbf{X}^*$ 为复响应幅度矢量。

2 考虑频率依赖性的复合圆柱壳振动频率与阻尼迭代求解

分析黏弹性阻尼层薄壁圆柱壳的振动频率与阻尼需要求解固有频率、模态振型和模态损耗因子等参数, 由于贴敷的黏弹性材料具有频率依赖性, 这里采用特征向量增值法^[18]通过迭代求解其振动频率与阻尼。

黏弹性复合圆柱壳的特征方程可以表示为

$$[-\lambda_r^* \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)] \boldsymbol{\varphi}_r^* = \mathbf{0} \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (18)$$

式中 λ_r^* 、 $\boldsymbol{\varphi}_r^*$ 分别为第 r 阶复特征值和复特征向量。

当角频率 $\omega=0$ rad/s 时, 复合圆柱壳的特征值和特征向量为 $\lambda_{r,0}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}_{r,0}$, 其与任意频率下的复特征向量存在一个差值, 定义为特征向量的增量, 表示为

$$\Delta \boldsymbol{\varphi}_r^* = \boldsymbol{\varphi}_r^* - \boldsymbol{\varphi}_{r,0} \quad (19)$$

特征向量的增量 $\Delta \boldsymbol{\varphi}_r^*$ 可进一步表示为

$$\Delta \boldsymbol{\varphi}_r^* = \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{b}_r^* \quad (20)$$

式中 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 为 $\omega=0$ 时系统特征向量组成的矩阵, $\mathbf{b}_r^*$ 为模态贡献系数向量, $\mathbf{b}_r^*$ 的表达式为

$$\mathbf{b}_r^*(p) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_{p,0}^T \boldsymbol{\psi}_r^* / (\lambda_{p,0} - \lambda_{r,0}) & p \neq r \\ 0 & p = r \end{cases} \quad (21)$$

式中 $\boldsymbol{\psi}_r^* = (\mathbf{K}(0) - \mathbf{K}^*(\omega)) \boldsymbol{\varphi}_{r,0}$ 。

所以可以进一步得到复特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_r^*$, 而复特征值 λ_r^* 可以由瑞利商得到, 求解式为

$$\lambda_r^* = \frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{*T} \mathbf{K}^*(\omega) \boldsymbol{\varphi}_r^*}{\boldsymbol{\varphi}_r^{*T} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_r^*} \quad (22)$$

用迭代的方法计算复合圆柱壳的振动频率与阻尼。步骤如下:

1) 计算角频率 $\omega=0$ rad/s 时的系统特征值 $\lambda_{r,0}^*$, 特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_{r,0}^*$ 和刚度矩阵 $\mathbf{K}(0)$, 并将特征向量归一化。设置 $I=1$, 最大迭代次数 $I_{\max}$, 收敛条件 t_{ol} 和初始频率 ω 。

2) 通过频率 ω 计算复模量 $E^*(\omega)$, 再由式 (12) 计算单元复刚度矩阵 $\mathbf{K}_e^*$, 经组集后获得复刚度矩阵 $\mathbf{K}^*(\omega)$ 并计算增量刚度矩阵 $\Delta \mathbf{K}^*$ 。

3) 通过式 (21) 计算模态贡献系数向量 $\mathbf{b}_r^*$, 式 (19) 和式 (20) 计算特征向量的增量 $\Delta \boldsymbol{\varphi}_{r,i}^*$ 和复特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_{r,i}^*$, 利用式 (22) 计算获得第 r 阶复特征值 $\lambda_{r,i}^*$ 。

4) 计算式 (23) 中 k_I 的值, 若不满足终止条件 $k_I < t_{ol}$ 或 $I > I_{\max}$, 则令 $\omega = \text{Re}(\sqrt{\lambda_{r,i}^*})$, $I = I + 1$, 重复步骤 2) 和步骤 3)。

$$k_l = \max \left[\frac{\text{Re}(\lambda_{r,l}^* - \lambda_{r,l-1}^*)}{\text{Re}(\lambda_{r,l-1}^*)}, \frac{\text{Im}(\lambda_{r,l}^* - \lambda_{r,l-1}^*)}{\text{Im}(\lambda_{r,l-1}^*)} \right]$$

(23)

5) 若满足收敛条件,则输出此时的系统固有频率 f_r 和模态损耗因子 η_r ,可以表示为

$$f_r = \sqrt{\text{Re}(\lambda_r^*)}/2\pi$$

(24)

$$\eta_r = \text{Im}(\lambda_r^*)/\text{Re}(\lambda_r^*)$$

(25)

3 实例研究

3.1 问题描述

本部分以贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳为对象实践本文研发的算法。圆柱壳名义半径为 225 mm,壁厚为 3 mm,长为 210 mm,夹持端由 18 个 M12 规格的螺栓固定在夹具上,螺栓预紧力为 40 N·m。基体材料为 45 # 钢,弹性模量 $E_1 = 210$ GPa,泊松比 $\mu_1 = 0.269$,密度 $\rho_1 = 7850$ kg/m³。

如图 5 所示,ZN-1 黏弹性阻尼层贴敷在圆柱壳的上部,圆柱壳高度与贴敷高度之比 $L/L_c = 3$,具有频率依赖性的黏弹性材料特性曲线见图 6,该阻尼层的泊松比 $\mu_2 = 0.5$, $\rho_2 = 789.5$ kg/m³,贴敷厚度为 1 mm。

采用锤击法测试复合圆柱壳的振动频率与阻尼,构建的实验系统如图 7 所示。在圆柱壳上共标记有 54 个测点,测点从最上至下共 3 圈,每一

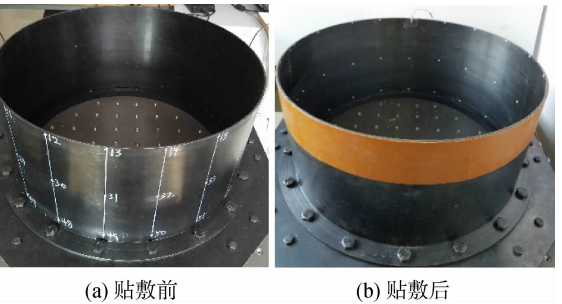


图 5 圆柱壳实验件

Fig.5 Experiment piece for cylindrical shell

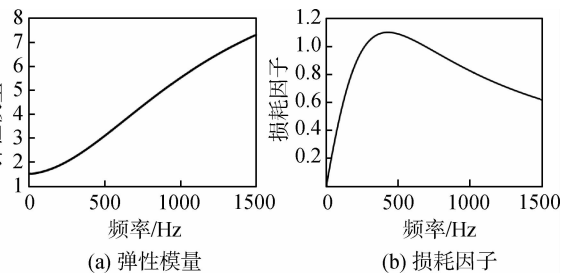


图 6 ZN-1 黏弹性材料特性曲线

Fig.6 Characteristic curves of ZN-1 viscoelastic material

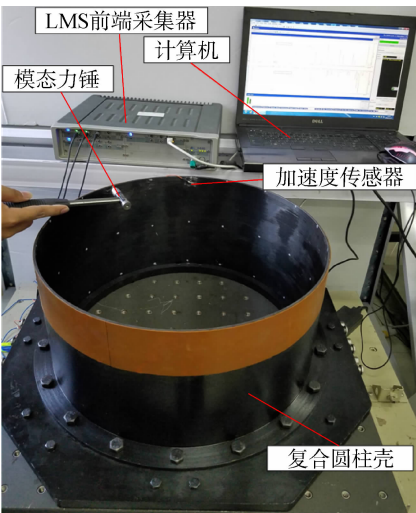


图 7 锤击测试图

Fig.7 Hammer test chart

圈 18 个测点。加速度传感器的位置为拾振点,使用 PCB 模态力锤从上至下逐点锤击实验件,用 LMS 16 通道便携式数据采集前端采集实验数据,最终可获得 0~1500 Hz 范围内圆柱壳的各阶固有频率及其对应的模态振型,相关实验结果见后续理论部分。

3.2 研发复合壳单元的正确性校验

针对分析对象,以 MATLAB 软件自编有限元求解程序与 ANSYS 软件仿真对比验证所开发复合壳单元的正确性。不考虑黏弹性材料的频率依赖性,弹性模量按 $E_2 = 4$ MPa 引入,对比全约束态下的固有频率。ANSYS 软件仿真使用的是 Solid186 实体单元,划分单元数为 8 340 个;MATLAB 程序划分单元数量为 216 个,节点数量为 288 个,如图 8 所示。计算结果均列在表 1 中,其中 f_{ANSYS} 和 f_{finite} 分别为用 ANSYS 和自编有限元程序计算获得的固有频率。

由表 1 可知,开发的 4 节点 24 自由度壳单元其在划分单元数较少时仿真精度便能媲美 ANSYS 软件的 8 340 个单元的结果。

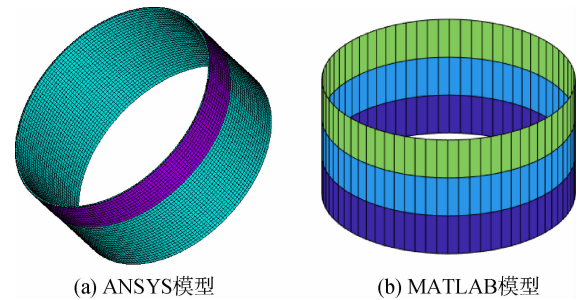


图 8 有限元模型

Fig.8 Finite element model

表 1 全约束下复合圆柱壳的前 5 阶固有频率

Table 1 First 5 natural frequencies of composite cylindrical shells under full constraint

阶次	$f_{\text{ANSYS}}/\text{Hz}$	$f_{\text{finite}}/\text{Hz}$	$(f_{\text{ANSYS}} - f_{\text{finite}} / f_{\text{finite}}) / \%$
1	632.87	638.55	0.89
2	762.35	768.69	0.82
3	949.55	956.88	0.77
4	1177.50	1186.42	0.75
5	1581.20	1593.70	0.78

表 2 周向变刚度分布各自由度的弹簧刚度值

Table 2 Spring stiffness values with different degrees of freedom for circumferentially variable stiffness distributions

参数	$k_u/10^7(\text{N/m})$	$k_{u\theta}/10^{10}(\text{N/rad})$	$k_v/10^8(\text{N/m})$	$k_{v\theta}/10^{10}(\text{N/rad})$	$k_w/10^4(\text{N/m})$	$k_{w\theta}/10^3(\text{N/rad})$
k_{j1}	265	5 340	7.64	843	22.2	3 670
k_{j2}	1.31	8.71	1.29	5.37	6.02	5.91

表 3 周向均匀分布各自由度的弹簧刚度值

Table 3 Spring stiffness values with different degrees of freedom for circumferentially uniformly distribution

参数	数值
$k_u/10^{10}(\text{N/m})$	9.96
$k_v/10^7(\text{N/m})$	8.41
$k_w/10^{10}(\text{N/m})$	7.28
$k_{u\theta}/10^9(\text{N/rad})$	3.17

图 6 中描述了激振频率同弹性模量及损耗因子的关系 $E^*(\omega)=f(\omega)$,通过图 6 可由频率 ω 获得对应的复弹性模量,代入复合圆柱壳模型中经特征向量增值法计算可获复特征值和复特征向

3.3 振动频率与阻尼求解

用所研发的有限元法对贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳进行振动频率与阻尼分析。基于实测得到的未贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳的前 5 阶固有频率,利用 MOEA/D 匹配算法可反推辨识出周向变刚度弹性约束模型对应不同自由度的两种弹簧单元的刚度值,如表 2 所示。

为了便于对比这里对弹簧均匀分布的情况也做了理论计算,以 3 组平动弹簧 k_u 、 k_v 、 k_w 和 1 组旋转弹簧 $k_{u\theta}$ 模拟复合圆柱壳的边界条件,每个自由度上的弹簧刚度值同样由 MOEA/D 匹配算法获得,结果如表 3 所示。

量,经过反复迭代计算可获得每一阶的固有频率值。

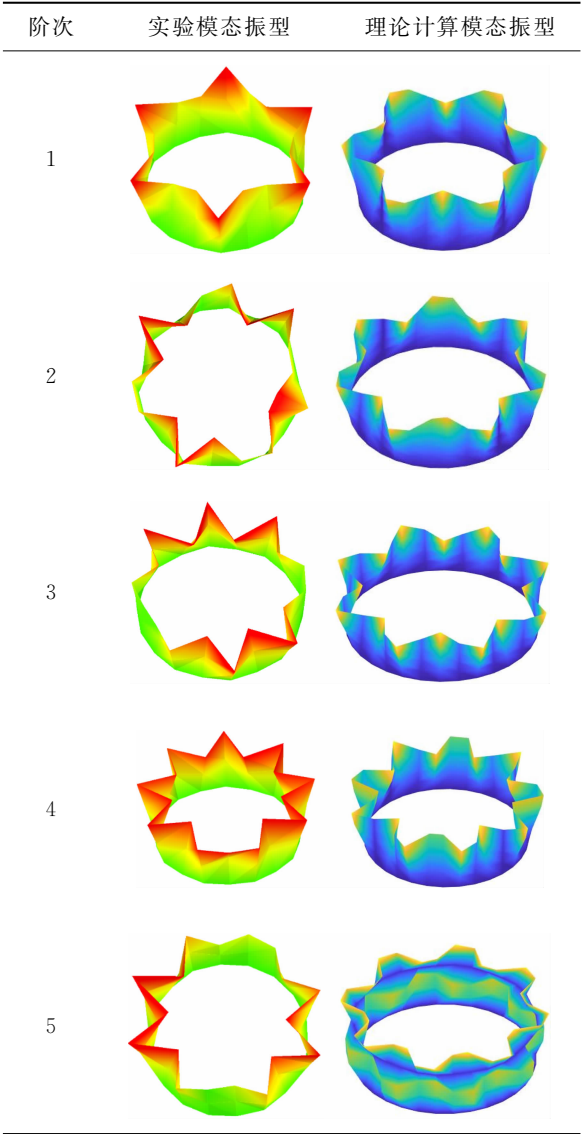
在考虑黏弹性材料频率依赖性的前提下,分别将周向变刚度分布和周向均匀分布情况下的弹簧刚度值代入到局部贴敷黏弹性阻尼层的圆柱壳有限元模型中,经上述迭代计算获得复合圆柱壳在不同弹性约束条件下的固有频率值。所有计算结果均列在表 4 中,其中 f_{unicir} 和 f_{varcir} 分别为周向均匀分布和周向变刚度分布下的前 5 阶固有频率计算结果,为了便于比对,实验测得的前 5 阶固有频率值 f_{exp} 也放在表 4 中。周向变刚度分布对应的模态振型列在表 5 中。

表 4 实验与理论计算的前 5 阶固有频率

Table 4 First 5 natural frequencies obtained by experiment and theoretical calculation

阶次	实验 f_{exp}/Hz	周向均匀分布 $f_{\text{unicir}}/\text{Hz}$	周向变刚度分布 $f_{\text{varcir}}/\text{Hz}$	$(f_{\text{exp}} - f_{\text{unicir}} / f_{\text{unicir}}) / \%$	$(f_{\text{exp}} - f_{\text{varcir}} / f_{\text{varcir}}) / \%$
1	549.81	584.35	536.31	5.91	2.52
2	706.94	648.16	732.64	9.07	3.51
3	900.94	818.10	935.43	10.13	3.69
4	1127.19	954.86	1143.85	18.05	1.46
5	1382.56	1471.92	1413.73	6.07	2.20

表 5 实验与理论计算获得的前 5 阶模态振型对比
Table 5 Comparison of the first 5 order modal shapes obtained from experiment and theoretical calculations



由于受夹具及空气阻尼影响模态损耗因子不易于与实验结果比对,这里只给出理论计算的前 5 阶模态损耗因子 η_{theory} ,如表 6 所示。

表 6 前 5 阶模态损耗因子
Table 6 The first 5 modal loss factors

阶次	$\eta_{\text{theory}}/10^{-5}$
1	0.3708
2	0.0550
3	3.0125
4	0.0400
5	1.1537

比较周向变刚度弹性约束模型、周向均匀分布弹性约束模型和实验结果的前 5 阶固有频率值,周向变刚度弹性约束模型每一阶固有频率的计算精度都显著高于周向均匀分布的弹性约束模型,且模态振型基本与实验一致;证明了本文研发的求解复合圆柱壳振动频率与阻尼方法的正确性。

3.4 频率依赖性对复合圆柱壳振动频率与阻尼的影响

以下用数值算例说明黏弹性阻尼层的频率依赖性对复合圆柱壳的固有频率和模态损耗因子的影响。在前 5 阶固有频率范围内求得图 5 所示的黏弹性材料弹性模量和材料损耗因子的下限值、上限值和平均值,参见表 7 所示。在不考虑材料的频率依赖性时材料的弹性模量和损耗因子按表 7 提供的下限值、上限值和均值引入。

考虑和不考虑频率依赖性时计算获得的复合圆柱壳的固有频率 f_{consid} 和 f_{noconsid} 以及模态损耗因子 η_{consid} 和 η_{noconsid} 见表 8 和表 9。

从表 8 和表 9 的分析结果可以得出以下结论:①对于 ZN-1 型黏弹性阻尼材料,考虑及不考虑材料的频率依赖性时,对复合圆柱壳的固有频率求解结果影响不大,原因可能是由于黏弹性材料的弹性模量远小于基体的弹性模量,导致频率依赖性对其影响较弱。②对于 ZN-1 型黏弹性阻尼材料,在考虑及不考虑材料的频率依赖性时,对复合圆柱壳的模态损耗因子求解结果差异较大。在不考虑频率依赖性时,取损耗因子的平均值的分析结果与考虑频率依赖性的结果较为接近。

表 7 黏弹性材料的引入参数
Table 7 Introduction parameters of viscoelastic material

参数	下限值	上限值	均值
弹性模量/MPa	3.56	7.03	5.44
损耗因子 η	0.652	1.052	0.837

表 8 复合圆柱壳的固有频率
Table 8 Natural frequency of composite cylindrical shell

阶次	$f_{\text{consid}}/\text{Hz}$	$f_{\text{noconsid}}/\text{Hz}$		
		下限值	上限值	均值
1	536.31	536.31	536.31	536.31
2	732.64	732.64	732.64	732.64
3	935.43	935.42	935.43	935.43
4	1143.85	1143.85	1143.85	1143.85
5	1413.73	1413.72	1413.73	1413.73

表 9 复合圆柱壳的模式损耗因子

Table 9 Modal loss factors of composite cylindrical shell

阶次	$\eta_{\text{consid}}/10^{-5}$	$\eta_{\text{noconsid}}/10^{-5}$		
		下限值	上限值	均值
1	0.3708	0.2438	0.7767	0.4782
2	0.0550	0.0308	0.0980	0.0603
3	3.0125	1.5553	4.9553	3.0510
4	0.0400	0.0201	0.0640	0.0394
5	1.1537	0.5854	1.8651	1.1484

4 结 论

本文在考虑黏弹性材料频率依赖性以及非经典弹性约束边界的条件下,创建了局部贴敷黏弹性阻尼层的圆柱壳动力学有限元模型并进行了相应的分析计算,得到如下结论:

1) 研发了一种 4 节点 24 自由度的圆柱壳单元,推导了相应的刚度及质量矩阵,该单元可以有效模拟贴敷及不贴敷阻尼层的圆柱壳结构的力学行为。进一步,提出一种由 6 个弹簧组组成的周向变刚度弹性约束模型来模拟圆柱壳底部的弹性边界条件的方法,该方法考虑了螺栓影响区的变连接刚度特性,比较传统均匀分布边界条件的方法,可显著提升复合壳动力学分析的精度。

2) 通过刚度及质量矩阵的叠加,最终确定了局部贴敷黏弹性阻尼层圆柱壳的动力学有限元方程,并描述了用特征向量增值法求解其振动频率与阻尼的迭代计算过程。实例表明计算的固有频率与实测值偏差的绝对值最大为 3.69%,模态振型基本与实验一致,从而证明了所研发的复合圆柱壳有限元模型的正确性。

3) 基于所研发的模型,着重分析了所研究的 ZN-1 型黏弹性材料的频率依赖性对复合圆柱壳振动频率与阻尼的影响。结果表明对复合圆柱壳的固有频率求解时,考虑及不考虑材料的频率依赖性计算结果相差均小于 0.01%,说明黏弹性材料的频率依赖性对复合结构固有频率的影响较小;而对复合圆柱壳的模式损耗因子求解时,发现考虑与不考虑频率依赖性结果相差最大为 109.47%,说明该黏弹性材料对复合壳结构的模态损耗因子的影响较大。

参考文献:

[1] YANO D,ISHIKAWA S,TANAKA K,et al. Vibration a-

nalysis of viscoelastic damping material attached to a cylindrical pipe by added mass and added damping[J]. Journal of Sound and Vibration,2019,454:14-31.

[2] KIM T W,KIM J H. Eigensensitivity based optimal distribution of a viscoelastic damping layer for a flexible beam [J]. Journal of Sound and Vibration,2004,273(1/2):201-218.

[3] YUN K S,YOUN S K. Topology optimization of viscoelastic damping layers for attenuating transient response of shell structures[J]. Finite Elements in Analysis and Design,2018,141:154-165.

[4] SUN W,WANG Z,YAN X,et al. Inverse identification of the frequency-dependent mechanical parameters of viscoelastic materials based on the measured FRFs[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2018,98:816-833.

[5] 林松,高庆,李映辉,等. 一种考虑宽温宽频宽动态位移的粘弹性本构模型[J]. 航空动力学报,2007,22(3):431-438. LIN Song,GAO Qing,LI Yinghui,et al. A viscoelastic constitutive model under broad temperature frequency and dynamic displacement [J]. Journal of Aerospace Power,2007,22(3):431-438. (in Chinese)

[6] TUWA P R N,MIWADINOUC H,MONWANOU A V,et al. Chaotic vibrations of nonlinear viscoelastic plate with fractional derivative model and subjected to parametric and external excitations[J]. Mechanics Research Communications,2019,97:8-15.

[7] SAINSBURY M G,MASTI R S. Vibration damping of cylindrical shells using strain-energy-based distribution of an add-on viscoelastic treatment[J]. Finite Elements in Analysis and Design,2007,43(3):175-192.

[8] ZHENG H,CAI C,PAU G S H,et al. Minimizing vibration response of cylindrical shells through layout optimization of passive constrained layer damping treatments[J]. Journal of Sound and Vibration,2005,279(3/4/5):739-756.

[9] MOKHTARI M,PERMOON M R,HADDADPOUR H. Dynamic analysis of isotropic sandwich cylindrical shell with fractional viscoelastic core using Rayleigh-Ritz method[J]. Composite Structures,2018,186:165-174.

[10] SARAVANAN C,GANESAN N,RAMAMURTI V. Vibration and damping analysis of multilayered fluid filled cylindrical shells with constrained viscoelastic damping using modal strain energy method[J]. Computers and Structures,2000,75(4):395-417.

[11] ZHOU H,LI W,LV B,et al. Free vibrations of cylindrical shells with elastic-support boundary conditions[J]. Applied Acoustics,2012,73(8):751-756.

[12] YANG C,JIN G,LIU Z,et al. Vibration and damping analysis of thick sandwich cylindrical shells with a viscoelastic core under arbitrary boundary conditions [J]. International Journal of Mechanical Sciences,2015,92:162-177.

[13] SONG X,CAO T,GAO P,et al. Vibration and damping analysis of cylindrical shell treated with viscoelastic damp-

ing materials under elastic boundary conditions via a unified Rayleigh-Ritz method[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2020,165:105158. 1-105158. 17.

[14] GOULD H H,MIKIC B B. Areas of contact and pressure distribution in bolted joints[J]. Journal of Engineering for Industry,1972,94(3):864-870.

[15] LOVE A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press,2013.

[16] ZIADA H H,ABD E L L. Load,pressure distribution and contact area in bolted joints[J]. Journal of the Institution of Engineers (India): Mechanical Engineering Division, 1980,61:93-100.

[17] ZHANG Q,LI H. MOEA/D:a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2007,11(6):712-731.

[18] SUN W,YAN X,GAO F. Analysis of frequency-domain vibration response of thin plate attached with viscoelastic free layer damping[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines,2018,46(2):209-224.

(编辑:叶青、陈越)